La Logique comme Géométrie du Cognitif

Manifeste[1]

Jean-Yves Girard
*Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 – **CNRS***
163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09

girard@iml.univ-mrs.fr

22 mars 2004

1 Les grands cimetières sous la lune

Replacer la philosophie au centre de l'activité scientique, réhabiliter la philosophie des sciences, quel programme ! Pour cela, nous proposons de réactiver l'outil majeur que constitue la *logique*, en la dégageant de l'ornière du « tournant linguistique » ; cette réactivation se ferait au moyen de la *géométrie*, un « tournant géométrique » en quelque sorte. La géométrisation devient possible —et surtout nécessaire— du fait de l'irruption du *cognitif*, qui rend caduc le vieux paradigme vérisme/dualisme/atomisme/essentialisme hérité du XX$^{\text{ème}}$ siècle, le siècle du *scientisme.*

Le scientisme recherche des réponses, alors que la *science* chercherait plutôt des questions. Vers 1900, on cherchait des « solutions finales[2] », toutes les questions devant trouver leurs réponses, un peu comme des vierges leur mari. Le scientisme, qui ne peut pas faire d'erreur, s'attaquait dès 1904 aux problèmes raciaux : 80000 Hereros pendus en Namibie, au nom de l'eugénisme... et ce n'était que le II$^{\text{ème}}$ Reich. Et que dire de la solution finale des conflits de classe, l'extermination des « Koulaks », au nom de la « science » marxiste, au début des années 1930 ? Le paradigme que nous critiquons n'est pourtant affilié à aucun des « ismes » meurtriers du siècle passé ; mais il s'est nourri à la même mammelle, celle d'une régression sans précédent de la pensée, concommittante à un progrès technique, lui aussi, sans précédent.

2 Une aussi longue absence

Le siècle dernier a ainsi vu s'accentuer le fossé entre la science et la réflexion sur la science. D'un côté, des scientifiques (souvent) excellents qui s'adonnent au réductionnisme Jivaro, de l'autre des philosophes (toujours) cultivés qui s'imaginent pouvoir discourir sur la science à partir de données recueillies (au mieux) dans des textes de vulgarisation. Pôles de la même pile, s'ils se méprisent... allègrement, ils s'accordent sur l'essentiel : la philosophie n'est pas une activité très sérieuse. Tweedledum pense que c'est bien sympa, mais pas vital : passez, Guillaume d'Ockham ! Tweedledee voit le scientifique comme un technicien, une espèce de cuisinier qui prépare des plats, mais dont le goût n'est pas assez sûr pour les apprécier à leur juste valeur.

Dire que le scientifique ne comprend pas ce qu'il fait, c'est un peu raide. Les nouvelles théories n'émergent tout de même pas par sélection naturelle... Le scientifique « sait » donc ce qu'il fait, même s'il l'exprime « à sa manière » : ainsi, souvent, un surmoi scientiste vient-il brouiller son message. Mais il ne faudrait pas non plus tomber dans l'excès inverse et prétendre que la communication n'est qu'une activité futile. Car enfin, on doit communiquer avec ses collègues, et surtout *avec soi-même* ; cette communication, c'est la réflexion méthodologique qui oriente le travail, le met en abyme, c'est le choix des problèmes, des directions porteuses, et c'est bien du domaine de la « philosophie ». Et, devant une parcellisation du savoir sans précédent, la réflexion sur la science est devenue une priorité, aussi bien pour le « savant » chevronné que pour le néophyte qui « entre en science ».

Pour sûr, le temps des grands « honnêtes hommes » est révolu, il n'y aura jamais plus de Descartes, de Pascal, de Leibniz. La spécialisation est telle que quand un scientifique domine les principales branches de son domaine, sans même y faire d'étincelles, il passe *ipso facto* pour un Pic de la Mirandole... Entendu, mais on doit plaider une sorte d'« exception culturelle » quant à la philosophie des sciences. S'il n'y a plus de philosophe-mathématicien-physicien-astronome, on peut rêver d'une *médiation* entre ces activités irrémédiablement découplées.

3 Le tournant linguistique

Le médiateur entre science et philosophie, ce pourrait être le logicien. En fait, la logique —par-delà une étymologie qui la ramène trop au langage— ne se définirait-elle pas comme le carrefour entre science et philosophie ? Quoi qu'il en soit, elle est bien placée pour cela —et entre nous, ce n'est pas trop original.

Cette remarque sous-tendait le « tournant linguistique » du siècle passé, un moment d'une extrême importance. Le tournant linguistique, en donnant au langage une place prépondérante, s'opposait au *vérisme*[3] de manière, sinon convaincante, du moins sincère à l'origine. Très vite le projet a trouvé ses limites : tout ramener aux propriétés du langage, c'est hardi et intéressant, mais cela confère auxdites propriétés une exterritorialité douteuse. On parle de « méta »-propriétés, et de méta en méta, à la manière d'une poupée-gigogne, chacune déresponsabilisant la suivante, le tournant s'est mis à... tourner en rond, disque rayé, vortex fondationnel où deux tortues se poursuivent en se mordant la queue, croyant avancer alors qu'elles font du sur-place. C'est ce que nous dit le théorème de Gödel de 1931 : formellement, il enregistre l'échec de l'« exterritorialité ». Après cette date, le « tournant » n'est plus, au niveau conscient du moins, qu'une activité purement scholastique, académique.

La vision dominante —contre-réforme consécutive au théorème de Gödel— est conforme à la théologie Nestorienne : tout repose sur une trinité Sémantique/Syntaxe/Méta. Le Fils (ou Verbe) ne reflète qu'imparfaitement son père (la Sémantique), c'est l'incomplétude comme non-consubstantialité du Fils. Heureusement que le Saint-Esprit est là, un peu roublard, pour brouiller les cartes : c'est le Méta, le Polyfilla des fissures fondationnelles. Cette vision s'est attiré le mépris cordial des scientifiques, qui préfèrent passer pour des platoniciens mal dégrossis plutôt que de carburer au méta.

L'appel au méta revient à admettre le côté primitif, rétif à toute analyse, des opérations logiques[4] : aux stratesvériste (l'appel inévitable à la théorie des ensembles, voir *infra*) et dualiste (l'opposition syntaxe/sémantique) se surimpose un *essentialisme* douteux... Après Nestorius, Thomas d'Aquin.

4 Augustin vs. Thomas

Le remède s'avère pire que le mal, il y a quelque chose de pourri dans le tournant linguistique. En regardant de près, on peut y distinguer deux aspects, d'une part un *procéduralisme* qui par nature est plus proche de l'existentialisme, d'Augustin[5]. D'autre part un *atomisme* qui voudrait réduire le complexe au simple, le gros au petit : on pense qu'une galaxie est faite d'étoiles, et non pas le contraire; cet atomisme a échoué en physique, en biologie[6]. Il est responsable de la régression essentialiste, de la prégnance du « méta » dans le *tournant linguistique*,

Certains logiciens, et non des moindres, pensons au débat Gödel/Bernays[7], ont une position augustinienne : « la preuve est antérieure à l'énoncé prouvé[8] », à l'opposé du thomisme de Tarski ou de Kreisel[9]. L'augustinisme en logique consisterait donc en une priorité donnée aux *protocoles* —qui sont de nature forcément un peu langagière— mais sans leur attribuer de sens *a priori* : le sens apparaît par polarisation, quand on se focalise sur certains protocoles, en « brisant la symétrie » pour ainsi dire. Pour un essentialiste, le protocole, le formalisme, la preuve, suit la loi, lui obéit ; l'existentialiste est plus « western[10] » : il pend d'abord et juge après, les choses sont comme elles sont et non comme elles devraient être. Pourquoi cette tendance est-elle aussi minoritaire ? Il faut bien l'avouer, à cause du même atomisme qui a sévi par ailleurs : on ne peut pas donner une explication révolutionnaire du monde à partir de trois bouts de ficelle, en méprisant l'apport des vraies mathématiques, de la physique, et tout particulièrement du quantique. Pour présenter un point de vue « augustinien » conséquent, il faut que l'existence précède l'essence, mais de quelle existence parle-t-on ? Sûrement pas de celle des 26 lettres de l'alphabet ! D'où la quête de géométrie.

5 Le cognitif

Mais pendant que certains dorment. . ., la pierre des soirs tourne dans sa conque[11] : mais pas en rond, insensiblement, elle se met à pointer vers une autre direction, le *cognitif.*

Si le vérisme suppose une stricte ségrégation entre objet et sujet, on peut définir *a contrario* le cognitif comme l'objectivisation du sujet, qui devient un objet à part entière. Ainsi, le cerveau humain n'apparaît-il plus seulement comme un artefact relevant de la chimie, réalisant de façon approximative un sujet idéal, c'est le Sujet lui-même, consubstantiel à l'objet : le cognitif n'est pas Nestorien. Du cognitif, on en trouve en linguistique avec les verbes comme « je sais », « je crois », avec le conditionnel, avec la distinction parfait/imparfait. . . Mais c'est surtout la physique du XX$^{\text{ème}}$ siècle qui fut cognitive. Déjà le chaos (Poincaré) énonçait une impossibilité *pratique*, celle de prédire le tirage du loto, ou plus noblement l'évolution à long terme du système solaire. Puis la relativité restreinte (Einstein, 1905) déréalisa le temps et l'espace, la masse. Mais, après tout, la mécanique Galiléenne était déjà une forme de relativisme, et, au beau milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, bien avant 1917, Riemann avait eu l'intuition de la relativité générale. Quant au quantique (Heisenberg & al., 1925), il ne s'en prend plus simplement à la *faisabilité* de la mesure, ou au caractère *absolu* du résultat, il refuse jusqu'à l'objet mesuré, c'est le *principe d'incertitude*, qu'une fâcheuse assonnance rapproche d'*incomplétude*, alors que l'incomplétude, *stricto sensu*, est un phénomène de type chaotique, qui énonce l'inconnaissabilité d'un phénomène par ailleurs objectif. Plus récemment, l'informatique s'en est aussi mêlé, en effet, qu'est-ce qu'un ordinateur, sinon un sujet-objet ?

6 Le vérisme (anti-)cognitiviste

Le cognitif étant la négation même du vérisme, il est donc naturel qu'on ait cherché à les concilier, ou plutôt à *étouffer* le cognitif dans un carcan réaliste.

Un premier exemple : on a trouvé une analogie entre les phénomènes cognitifs et la *prouvabilité* formelle, ce qui est indéniable, mais comparaison n'est pas raison. Ainsi y a-t-il analogie entre un fer à repasser et un haut-parleur, tous deux utilisent du courant alternatif ; pourtant un haut-parleur branché sur le 220V, c'est pas terrible. Il ne s'agit pas ici de refuser le processus —consubstantiel à la science— de réduction d'un nouveau phénomène ; il s'agit simplement —quand ce processus ne débouche que sur des atrocités— d'admettre l'irréductibilité de la nouveauté, un point c'est tout. Ainsi, était-il légitime de tenter de réduire le quantique au thermodynamique au moyen de « variables cachées » ; mais pas d'insister devant des échecs irréfragables.

L'analogie connaître/prouver suggère un pendant cognitif aux modèles. C'est ainsi qu'on a essayé de réduire le cognitif au vérisme au moyen de nouvelles valeurs de vérité (`vrai, faux, attendez SVP, trop tard`), avec des modalités —ces condoms[12] de la logique— (`pour sûr, ça se pourrait bien`)... et, chaque fois, ce n'est pas ça. On arrive au mieux à des métaphores laborieuses[13] avec chaque fois un système (il-)logique *ad hoc*, i.e., centré sur la métaphore, qui se révèle métaphore de soi-même[14]. Un seul échec honorable, les *modèles de Kripke* —une idée marrante des années 1950, très supérieure aux « logiques » épistémiques et autres indignités—, mais qui se révèle stérile. On veut parler du potentiel, du conditionnel : c'est simple, on fait la liste de tous les mondes possibles. Mais, si la liste des possibles est déjà là, on se demande bien où se cache le potentiel, il est timide ou quoi ? Dans un problème qui demandait un redécoupage radical du Yalta objet/sujet, on s'est contenté de mettre des moustaches aux objets. De même, le problème du temps logique et les « logiques » temporelles ; ce grand mystère de la nature, le temps, est évacué bureaucratiquement, on indice tout par le temps. Comme dit la chanson « si on pouvait arrêter les aiguilles »... ici, ce sont les horloges qui sécrètent le temps. La petite vibration cognitive est recréée par des moyens externes, des modèles qui obéissent à des indices *perinde ac cadaver*..., les modèles de Loyola en quelque sorte.

La mécanique quantique a été —et fait toujours, n'est-ce pas, Claude Allègre ?— l'objet d'un refus viscéral de la part des véristes, à cause d'un détail —somme toute mineur— son non-déterminisme[15]. Parallèlement aux « variables cachées », les logiciens ont tenté de « boire le sortilège » au moyen de valeurs de vérité tordues... Pauvre von Neumann, il n'était guère inspiré quand il a créé la « logique » quantique... il est vrai qu'il n'a guère persévéré dans cette voie, et qu'on lui doit aussi les algèbres éponymes, et là, c'est du costaud. On sait ce qu'il est advenu de la logique quantique, ou plutôt on ne sait même plus. La faute originelle était de nature vériste : on garde le paradigme des valeurs de vérité, on va simplement remplacer l'algèbre de Boole par les projecteurs orthogonaux d'un Hilbert ; c'est un peu comme si on avait attaché un ventilateur sur une brouette : on ne peut plus rien mettre dedans et ça ne vole pas pour autant. La bonne idée (les algèbres de von Neumann) n'est pas loin, mais elle ne rentre pas dans un cadre dualiste sémantique/syntaxe. D'ailleurs, quelles que soient les imperfections de l'explication dite « de Copenhague », il est évident que le quantique ne peut pas s'accommoder d'une balançoire objet/sujet.

7 Le défi informatique

Plus tardivement, l'informatique devait prendre le relais en lançant un nouveau défi cognitif. Bien que les langages informatiques soient très semblables aux langages formels, la programmation ne se traite pas en vériste, en vrai/faux. Ainsi, ce qui intéresse l'informaticien ce n'est pas la *véracité* d'une information disponible sur Internet, c'est son *accessibilité*, sa reproductibilité... Insensiblement, la valeur booléenne de base est passée de `vrai/faux` à `gauche/droite`, c'est à dire que seule l'*opposition* entre les deux reste pertinente, tout comme spin en haut/spin en bas. Tout à coup, une école de pensée, remontant à Poincaré, Brouwer,..., l'*intuitionnisme*, perdue depuis longtemps dans les querelles de chapelle, refaisait surface. De *subjectiviste*, et donc inepte, l'intuitionnisme devenait déréaliste, *procédural*, augustinien. Qu'est-ce-que la procéduralité ? C'est le fait que la machine interagit avec... d'autres machines, en respectant des protocoles, et que rien d'autre n'a d'importance. Le reste, ce que nous voyons —ou plutôt *croyons* voir— n'est pas pertinent, tout ce qui compte c'est le dialogue des machines.

Prenons l'exemple d'un ratage cognitiviste : les informaticiens se sont rendu compte, en étudiant les bases de données, qu'« une information manquante est fausse ». En effet, une banque est capable de dire « M. Kurz n'est pas client chez nous », bien qu'elle n'ait pas de fichier de ses non-clients. Remarque cognitiviste essentielle, aussitôt bousillée, par l'adéquation supposée entre « connaître » et « prouver ». Les « logiques non-monotones » ressemblent à un *remake* du programme de Hilbert —qui était basé sur une idée voisine, réfutée par le théorème de Gödel—, mais avec les troisièmes couteaux de la logique : si une propriété n'est pas prouvable, alors sa négation l'est. Techniquement, l'erreur est facile à comprendre, il *faudrait* forcer l'adéquation `vrai = prouvable`, ce qui force à passer sur le corps des propriétés indécidables, qui correspondent aux « boucles », finies ou infinies, du calcul : on postule donc ce serpent de mer, le « détecteur de boucle »... Mais un argument diagonal —récurrent depuis

Cantor, Russell, Gödel— fabrique pour chaque « détecteur » une boucle qui lui échappe : *exit* les logiques non-monotones. Mais pourquoi donc a-t-on *voulu* forcer cette adéquation entre vérité et prouvabilité ? Le bon sens s'insurge là-contre : ainsi une banque ne retrouvera pas une cliente à partir de son nom de jeune fille, bien que celui-ci soit consigné dans les données la concernant ; de même, il n'y a pas de notion absolue de « présence d'un fichier sur un disque dur », la police peut y chercher des images compromettantes « effacées », mais qui subsistent au moins partiellement, alors que leur propriétaire les croit détruites. Autrement dit, le « non » de la banque, du logiciel de recherche, réfère à ses procédures internes et à rien d'autre. Vouloir qu'il en aille autrement c'est à la fois torturer la logique et mépriser la « réalité ». La banque ne parle pas de *la* vérité, mais de *sa* vérité, i.e., la réponse qu'elle donne réfère à un mode d'exploration, à une procédure de recherche.

La *complexité algorithmique* est un autre exemple de problème cognitif. À partir de considérations d'efficacité, on a été amené à classer les algorithmes, par exemple, par rapport au temps de calcul, ainsi les algorithmes en *temps polynomial*, et tout le monde a entendu parler du célèbre problème `P = NP ?`. Les approches à cette question sont véristes, e.g., « modèles finis » ; elles n'ont pas donné grand'chose, on ne dispose même pas d'une définition *maniable* des algorithmes polynomiaux. La complexité a un statut étrange, celui d'une théorie des ensembles (voir *infra*) avec une main attachée dans le dos[16] : on n'a pas droit à la fonction exponentielle, ça « coûte » trop cher. Mais y aurait-il une raison *intrinsèque*, mathématique, pour refuser la fonction exponentielle et les algorithmes non-polynomiaux ? C'est peut-être là le sens caché de la question, sans véritable enjeu concret, `P = NP`?. Bien sûr, cette raison serait de nature forcément cognitive.

Il est possible que le défi informatique soit aussi profond que le défi quantique. D'ailleurs l'émergence d'un *calcul quantique* —très théorique pour le moment— peut faire espérer une convergence de principe entre les deux activités[17].

8 L'atomisme ensembliste

Superficiellement, le « tournant linguistique » s'oppose au vérisme, une idée d'ailleurs révolutionnaire pour l'époque. Mais grattons un peu, et nous trouvons une strate profonde, très XIX$^{\text{ème}}$ siècle, très atomiste, la théorie des ensembles. Quand le formaliste est menacé, il se replie sur la théorie des ensembles, comme le gouvernement à Bordeaux en 1940 : dans la « théologie Nestorienne », le Père est ensembliste. L'erreur des linguistes tourneurs, c'est de n'avoir jamais remis en cause cette prégnance morale des ensembles et des partis pris du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Ces partis pris n'étaient, au départ, même pas fondationnels. Si la mise au point du système **ZF** se fait pour l'essentiel en 1908, avec Zermelo, c'est au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que tout s'élabore, à partir des travaux de Cantor sur les ensembles d'« exception » : est-ce que les valeurs d'une fonction déterminent son développement de Fourier, et dans ce cas, peut-on en négliger certaines ? Rien de vraiment fondationnel ici. Il y avait aussi un réel besoin de clarification consécutif aux découvertes de « passagers clandestins » dans le monde de l'analyse, e.g., une fonction sans dérivée ; c'était le temps des Bolzano, Weierstraß, Peano. Finis les « on voit bien que » : si une courbe n'a pas de tangente, on ne « voit » pas grand'chose ! Un travail colossal a été accompli pour définir rigoureusement toutes les notions mathématiques —pensons tout particulièrement à Dedekind— dans un esprit atomiste : définir le gros à partir du petit, le complexe à partir du simple.

Le succès de la théorie des ensembles est indéniable, c'est le « langage de bas niveau » des mathématiques : selon toute évidence, tout peut s'écrire dans **ZF**. La théorie des ensembles énonce l'unité des mathématiques[18], mais seulement une *unité de principe.* Elle représente plus une possibilité qu'une réalité : on n'écrit *pas*, ou peu, de mathématiques en théorie des ensembles ; mais on *pourrait.* Ce qui veut dire qu'on peut tout *traduire* en théorie des ensembles ; mais, *traduttore traditore*, sans que cela lui confère *ipso facto* un rôle fondationnel.

Avec la découverte des « passagers clandestins » dans la seconde partie du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il était *légitime* de s'interroger sur la validité de l'intuition géométrique, par exemple sur la pertinence de la notion de *dimension.* On découvre que, du strict point de vue ensembliste, la notion ne fait pas sens (tout ensemble infini est équipotent à son carré). De plus, la « courbe » de Peano, qui « recouvre » une surface, entame la notion de dimension au sens topologique ; mais le massacre s'arrête là, car la courbe de Peano n'induit pas un *homéomorphisme*[19], et la topologie algébrique devait, au XX$^{\text{ème}}$ siècle, montrer que des boules de différentes dimensions ne sont pas homéomorphes.

La chose semble réglée, la dimension n'existe pas du point de vue ensembliste, ou du point de vue de la mesure, par contre elle prend son sens du point de vue topologique, et à plus forte raison, du point de vue métrique. Il y a cependant un non-dit dans tout ceci : on admet qu'un objet mathématique est un ensemble (de points), sur lequel on plaque une « structure ». Ça marche, mais est-ce correct ? Dire qu'une droite du plan est l'ensemble de ses points, c'est possible, et c'est le choix (atomiste) de la théorie des ensembles ; mais on pourrait tout aussi bien dire qu'un point est l'ensemble des droites qui le contiennent, et d'ailleurs, ceci tient remarquablement la route : en passant aux *polaires*, il est impossible de dire si une droite est faite de points ou un point de droites ! Visiblement, la géométrie planaire ne parle pas d'ensembles, et rappelons que, pour les Grecs, un point n'était que l'intersection de deux droites ou l'extrémité d'un segment. Si on revient à la topologie, il est évident qu'une sphère n'est pas l'*ensemble* $\{(x,y,z)\ ;\ x^2+y^2+z^2=1\}$, néanmoins on peut *associer* cet ensemble à la sphère. Au lieu de voir la sphère comme un ensemble auquel on associe des groupes d'homologie…, on pourrait tout aussi bien l'appréhender par ses groupes d'homologie…, auxquels on associerait une représentation matérielle, une « réification » ensembliste. Autrement dit, au lieu de déclarer l'antériorité de l'ensemble (la « sémantique ») sur le groupe (la « syntaxe »), on pourrait retourner le paradigme. Est-ce l'œuf qui fit la poule ou la poule qui fit l'œuf ? On aurait tendance à finalement les renvoyer dos à dos, l'ensemble et ses groupes d'invariants.

9 La géométrie non-commutative

Ce constat est rendu un peu obsolète par la *géométrie non-commutative.* L'exemple classique est celui d'un *tore*, i.e., une chambre à air mathématique ; si on le découpe aux ciseaux en suivant une orientation constante, le résultat va dépendre de l'angle d'attaque : s'il est mal choisi (cas le plus courant), on n'en finit plus de redécouper le tore en une lanière de plus en plus fine ; en d'autres termes on crée une trajectoire *dense*, i.e., qui semble passer partout, alors que ce n'est pas une « courbe de Peano ». Comme si le tore était « trop serré », comme s'il manquait de points. Mais on ne peut pas trouver les « points manquants », et c'est l'idée même de tore-ensemble qu'on doit remettre en cause, par l'introduction des tores non-ensemblistes, « non-commutatifs », dit Connes. Techniquement parlant, un tore au sens habituel peut être appréhendé au moyen de l'espace de ses fonctions « lisses », qui est une algèbre commutative. Si on oublie la commutativité, les algèbres restent manipulables, mais ne proviennent plus d'une « vraie » *variété* comme le tore, elles ne sont plus « réifiables ».

Cet exemple devrait suffire à nous convaincre qu'on assiste à une véritable expulsion des ensembles et au début d'une nouvelle approche fondationnelle, en harmonie avec le miracle quantique. À vrai dire, Groethendieck en son temps avait déjà voulu expulser les ensembles au profit des *catégories* : malheureusement ses *topoi* sont « réifiables », i.e., ils ont quand même un substrat ensembliste « naturel », ce qu'on ne saurait trouver pour les algèbres d'opérateurs.

Mais *quid* du *commutatif* ? Des opérateurs commutent quand ils sont tous « diagonaux » dans une « base »[20] commune. Le non-dit commun à la logique, à la théorie des ensembles, aux catégories, c'est l'accord implicite sur une telle « base ». Tout ce beau monde, ensembles, éléments, preuves, modèles, langage, objets, morphismes, fonctions, arguments… « commute ». On ne s'accorde sur rien, sauf sur cette base, « arène » ensembliste, où tout se joue, tout se mesure. Tout le monde est donc calé sur les mêmes repères, mais imaginons un choc et que les gyroscopes se décalent... Les questions ne tombent plus pile sur leurs réponses, les billes dans leurs cases. Pourtant, si la logique est aussi augustinienne que le monde physique, l'interaction a lieu malgré son absence de statut formel. En physique, on sait qu'elle se fait au moyen de la *réduction du paquet d'ondes*. Voilà ce qu'il faut importer en logique pour pimenter le relation objet/sujet !

10 Le tournant géométrique

Cette expression ne doit pas être prise comme un rejet du tournant linguistique, à qui l'on doit des avancées fondamentales. Il s'agit plutôt d'une réforme, consécutive à la fossilisation dont nous avons parlé. L'idée linguistique est excellente, elle est la première étape de toute déréalisation, mais comme toute idéologie elle a ses caves, ses non-dits subliminaux. Et ici le non-dit a trait au sens. Sans vraiment l'avouer, on a supposé que le langage débouchait sur un monde vide, bêtement égalitaire, toutes les idées devenant uniformément laides quand on les a suffisamment codées, bureaucratisées, c'est l'*atomisme* que nous avons déjà dénoncé, et souvenons-nous que le XX$^{\text{ème}}$ siècle fut aussi le siècle de Brejnev. Ainsi les gens parfaitement incultes prétendent-ils que les mathématiques c'est $2+2 = 4$, montrant par là une confusion entre un calcul et un théorème ; les logiciens —paraît-il— plus raffinés du tournant linguistique diront que c'est plutôt $2 + 2 = 5$, car, n'est-ce- pas, le langage est arbitraire... On reconnaît ces gens aux choix de leurs notations, ils écrivent un produit tensoriel $\oplus$ et une somme directe $\otimes$, il n' y a pas de passe-droit au pays des symboles !

Que tout ne soit que langage, ou du moins, qu'à la manière d'une table de restaurant chinois, le monde s'offre à nous sous diverses formes équivalentes —dont le langage— de façon à être appréhendable sous ces divers angles, voilà une thèse respectable, et ce qu'on peut retenir sans grand risque du tournant linguistique. En revanche, nous allons faire l'hypothèse que le langage est structuré, qu'il n'est pas ce désert bureaucratique que nous venons d'évoquer. Mais, cette structure, où la chercher ? Sûrement pas dans une explication langagière du langage, qui conduit à un essentialisme prétentieux et stérile. Il reste la *géométrie*. Par géométrie, on n'entend rien de trop précis, disons qu'est géométrique ce qui est sensible au codage, ce qui s'oppose au codage.

La géométrie, c'est la découverte de structures simples, de symétries. Donnons un exemple : quiconque connaît un peu de logique sait que l'implication $\forall x \exists x \Rightarrow \exists y \forall x$ est incorrecte. Mais pourquoi au juste ? L'explication courante est que dans le premier cas le y dépend du x, et que dans le second, il est indépendant de x... et voilà pourquoi votre fille est muette ! Pourtant, on peut dire autre chose que cette triste paraphrase : le quantificateur universel $\forall x$ est négatif, passif : il attend quelque chose, autrement dit, « donne-moi une valeur a pour x et je te montre mon y »; avant d'agir, il est dans le royaume de l'implicite, puisqu'il réfère à un $x = a$ qu'il ne connaît pas. Rien de tel pour $\exists y$, qui est positif, actif, explicite : $\exists y$ veut dire « j'ai une valeur b pour y, je ne te la montre pas, elle est au fond de ma valise, mais si tu insistes tu l'auras ». Positif et négatif évoluent différemment, on peut toujours retarder les positifs (les prises de décision) ou, si on préfère avancer les questions, un groupe $+-$ peut donc se remplacer par un $-+$, ainsi, $\exists y \forall x$ implique-t-il $\forall x \exists y$, mais le contraire est faux. Ceci a une immense valeur mnémotechnique, ainsi est-il difficile de se remémorer le comportement de la quantification par rapport aux modalités ; dès qu'on a remarqué que $\Box$ est positif, on sait que ça se passe dans le sens $\Box\forall \Rightarrow \forall\Box$, et non pas l'inverse.

Nous venons de donner un exemple parmi d'autres de ce que nous appelons « géométrie » : les énoncés logiques se divisent en deux classes, négatifs ou positifs, suivant leur polarité.

11 Objet vs. sujet

Finalement, c'est le rapport objet/sujet, la place même de ce rapport que nous devons questionner. Vers 1900, il était raisonnable d'imaginer des objets mathématiques étudiés par un sujet prouvant des théorèmes. Ce qui a finalement donné lieu à une balançoire syntaxe/sémantique, organisée autour de propriétés d'échange vérité/prouvabilité : *correction* « ce qui est prouvable est vrai » et *complétude* « ce qui est vrai est prouvable ». L'*incomplétude* montre les limites de cette vision, et introduit un tiers, le méta, qu'on invoque les jours de mauvais temps, i.e., en permanence. C'est boîteux, verre à moitié plein ou à moitié vide, question de goût, en tout cas très en-dessous des prétentions originales du « tournant linguistique ». Le quantique, le cognitif, font passer le sujet au statut d'objet, non pas de façon accidentelle, mais de façon essentielle. Dans ce processus d'objectivation du sujet, l'informatique a joué un rôle majeur : on a été amené à réviser les paradigmes interprétatifs. Ainsi, au lieu d'un choix entre démonstration et contre-modèle, on préfèrera une version dialectique, sous la forme plus symétrique d'un jeu entre partenaires réputés homogènes. Mais, la révolution copernicienne n'a pas été faite, on utilise l'expression « sémantique des jeux », ce qui suggère une sorte de sémantique à double détente : les joueurs exprimant déjà l'opposition syntaxe/sémantique, si le jeu est une sémantique il ne peut être qu'une méta-sémantique (d'un méta-langage ?)... Décidément, il y a des vieilles hardes qui collent à la peau, ici encore l'essentialisme.

L'interprétation *procédurale* de la logique, i.e., la logique comme logique de ses propres règles, et non pas de son propre méta, fait apparaître des structurations profondes, comme la polarité susmentionnée. En termes *ludiques*, i.e., de jeux, la polarité c'est la distinction actif/passif, « je joue » contre « tu joues ». C'est aussi la distinction « je produis » contre « j'observe », objet/sujet. Cette distinction est fondamentale et en même temps très contingente, en effet, la dynamique logique suppose un échange des rôles (je joue, puis tu joues,. . .) ; cela veut dire qu'un même énoncé logique va, au cours de ses interactions, passer sans arrêt du statut de sujet à celui d'objet et *vice-versa*, en découvrant, tel un « oignon logique », des peaux de plus en plus profondes. Ce qui semble rouvrir le caveau où sommeille la liaison logique/quantique : en effet, si les opérations logiques de base correspondent à une polarisation objet/sujet, on comprend mieux le statut irréductible que le quantique accorde à l'observateur. Dans l'immédiat, il faudrait donner un sens plus précis à ces remarques, ces analogies, et tenter une interprétation quantique de la logique (et non pas une interprétation logique du quantique). En particulier, essayer de clarifier le statut quantique de la polarisation logique, en relation, peut-être avec la distinction fermion/boson.

12 Les intuitions fondamentales

Dans le dernier chapitre du *Retour du divin* (1943), Audiberti développe le mythe du sous-marin, une espèce d'enfer métaphysique, dont on ne saurait s'échapper, les rêves les plus généreux ayant déjà leur place dans ce vaisseau qui « embarque tout ».

La logique, le paradigme langagier, la théorie des ensembles, le monde « commutatif », c'est un peu ce sous-marin. On aimerait en sortir, mais, *modulo* les traductions du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, tout, même le quantique, même la géométrie non-commutative, tout peut s'écrire en théorie des ensembles, et tout peut s'axiomatiser, tout devient finalement langage. Pire, même ce qui n'a aucun sens en acquiert quand on le formalise : ainsi, ne faut-il pas argumenter très fort pour convaincre quiconque de la nullité de la logique des cocus corses. . . Mais au coin du bois veille l'incontournable sophisme : « la cohérence de ce système est un énoncé mathématique qui a forcément un sens ».

Pourtant, on a bien l'impression que, comme disait Thom, la limite du vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiant[21]. On pourrait raisonnablement soutenir que le théorème de Gödel, avant « je ne suis pas prouvable », est d'abord « je ne veux rien dire ». L'idée que n'importe quoi (et tout spécialement les questions langagières du type « cohérence formelle ») soit *a priori* vrai ou faux est une

« intuition fondamentale » dont on peine à se défaire. Une analogie dans le domaine moral : on vient de vivre une guerre manichéenne, l'axe du bien contre l'axe du mal —et d'ailleurs ce manichéisme[22] a son résultat d'incomplétude, ces armes de destruction massive qui doivent exister mais qu'on ne peut pas trouver ! Pourquoi ne pas admettre qu'il y a des choses plus ou moins vraies (en fonction de la difficulté à les établir, par exemple) ? On pourrait aussi imaginer que le sens se dilue, que, tout comme certaines œuvres sont plus belles que d'autres, certains énoncés ont plus de sens que d'autres —par exemple la loi de réciprocité quadratique est « plus mémorable » que la cohérence du système bidule— et que, d'ailleurs, ce ne soit pas vraiment absolu, quantifiable. Mais cela demande une finesse d'interprétation tout à fait étrangère à la tradition logique.

13 Dieu a-t-il fait les entiers ?

Finalement, on en revient toujours aux entiers et à la célèbre phrase de Kronecker : « Dieu a fait les entiers, l'homme a fait le reste ». La déréalisation ne peut avoir lieu qu'en s'attaquant à cette intuition fondamentale. Cette attaque doit porter sur deux fronts, le point de vue mathématique, et le point de vue biologique, en particulier le cerveau[23].

Commençons par le cerveau : la structure des cellules, notre mode d'appréhension de l'espace, conditionnent nos « intuitions fondamentales ». Cela ne veut pas dire qu'avec un cerveau différent, les groupes d'homologie seraient différents, que non pas ! Mais on verrait la notion de dimension différemment, on hiérarchiserait autrement les *artefacts* mathématiques. On aurait aussi trouvé le concept d'entier, mais serait-il aussi fondamental, penserions-nous aux entiers comme cette liste idéale de briques ? Plus généralement, nos préjugés sur la réalité viennent de déterminismes biologiques —le mathématicien comme primate[24]— ou même culturels, voir la différence avec la pensée orientale, beaucoup moins vériste[25].

Il y a d'autres intuitions de base qui ont été évacuées par la logique, ainsi la distinction essentielle entre *parfait* et *imparfait*, distinction rendue en français par le choix des temps, en russe par un changement de verbe. Cette nuance n'existe pas dans le monde vériste. La principale conquête de la *logique linéaire* (1986) c'est de faire apparaître, par delà la structure éternelle, abstraite, de la logique usuelle, une strate perfective. Le monde logique perfectif est très peu vériste, il est tout à fait adapté à notre approche « augustinienne ». Dans une implication « parfaite » $A \multimap B$, la prémisse n'est utilisable qu'une fois, comme la notion de parfait en linguistique indique une action ponctuelle, non-itérée. Le parfait vit plutôt dans le fini, il est assez proche du quantique.

L'imparfait est plus stable, éternel[26], plus « thomiste ». Il est géré par une modalité *exponentielle*, $!A$ et rappelons que la notion de modalité nous vient d'Aristote et des philosophes essentialistes du Moyen-Âge, dont Thomas ; ces gens-là s'intéressaient à la possibilité, à la nécessité. L'infini apparaît alors, non comme cette muraille de Chine faite de briques préexistantes, mais comme la *pérennité* du vrai. Nous avons vu (note 12) *comment* tricher avec les modalités ; ceci est rendu possible par leur caractère *essentialiste*, primitif. Les exponentielles ne font pas exception, on peut les « ajuster » de façon à obtenir l'infini « usuel », ou des infinis plus « doux », moins extrêmes[27]. Soulignons la solution de continuité entre le monde parfait, qui s'explique harmonieusement en termes de sa propre géométrie et le monde imparfait qui repose sur des postulats finalement justifiés par des « intuitions fondamentales » douteuses.

Les entiers constituent, dans les fondements « classiques », le paradigme de l'infini, et la construction imparfaite de base[28]. Changer l'imparfait, c'est changer les entiers, non pas en tant qu'individus, mais en tant que dynamique, croissance, complexité des fonctions. Il faudrait pour cela atténuer l'essentialisme présent de notre approche, en relation avec ce qui n'a jamais été utilisé, i.e., le quantique. On se rappellera en particulier le côté « bosonique » de l'exponentielle $!A$ (autant de copies *identiques* de A que l'on veut). Cela pourrait peut-être nous permettre de dépasser une fois pour toutes la désespérante phrase de Kronecker.

Notes

[1] Tentative de synthèse à partir des activités du groupe `LIGC`, voir le site `http ://www-philo.univ-paris1.fr/Joinet/ligc.html`. Le texte, quoique personnel, doit beaucoup aux activités du groupe ; ainsi l'expression « tournant géométrique » vient-elle de la contribution de Tronçon, ce volume. Mais je n'ai pas cru bon de surcharger le texte de références à des points de vue développés à quelques pages d'ici. Synthèse n'est pas synchrétisme : je n'ai pas cherché à reproduire fidèlement la palette d'opinions et de points de vue de notre groupe ; j'ai tenté au contraire de présenter une vue cohérente et connexe, avec les simplifications et les oublis que cela suppose. Quant au style, il ne correspond pas à celui d'un manifeste « sérieux », mais qu'on me pardonne : c'est le mien.

[2] Cette expression scientiste banale est devenue emblématique de la barbarie nazie. À noter que les néo-positivistes Nagel & Newman l'employaient encore, *straight*, en… 1955 : « The final solution of the consistency problem ».

[3] Ici un mot nous manque : « réalisme » satisfait les scientifiques mais froisse les philosophes, donc optons pour un mot vierge. Le « vérisme », mot emprunté à l'histoire de l'opéra (Puccini), serait donc le réalisme en temps que « réisme », culte de la chose, débouchant sur l'opposition objet/sujet. Incidemment, ce mot nous renvoie à Tarski et à sa théorie de la vérité « $A \wedge B$ est vrai si A est vrai *et* B est vrai ».

[4] Cf. le « 2001 » de Kubrick, où l'intelligence préexiste à son porteur.

[5] Saint Augustin, dans son combat contre le manichéisme, définit le bien et le mal par leur

interaction, et non comme des absolus ; ce qui en fait le Saint Patron des existentialistes.

[6] Voir Longo, ce volume.

[7] Voir Crocco, ce volume.

[8] Pour les λ-calculistes, c'est la question du *typage*. L'ordinateur ne manipule que des notions non-structurées, λ-termes purs ; le typage est postérieur, un commentaire pour l'utilisateur. Le commentaire ne peut pas *modifier* le comportement du programme ; il peut par contre aider à *choisir* tel programme, telle donnée, plutôt que tel(le) autre.

[9] Pour Tarski, sa théorie lapalicienne de la vérité ; pour Kreisel, la réduction des paradigmes fondationnels à leur formalisation dans un système *donné à l'avance*.

[10] Á l'opposé de « 2001 » et de ses moules préétablis, les *westerns* d'Anthony Mann montrent un personnage se faisant (*The Naked Spur*, *The Far Country*) ou se défaisant (*Bend of the River*) au gré de ses interactions.

[11] Audiberti, *Des tonnes de semence* 1941.

[12] On les utilise trop souvent pour interrompre le discours déductif. Par exemple, on aime bien la propriété A, mais elle contredit les autres, alors on écrit $\bullet A$, et on peut faire en sorte que $\bullet A$ n'ait aucun rapport formel avec A ; mais on *donne l'impression* d'avoir énoncé A. Cette vieille blague que répétait mon père vers 1957 : « Sur les pissotières on lit « *Saint Raphaël Quinquina* », mais ce n'en est pas », rend justice à l'hénaurmité de l'arnaque.

[13] La palme d'or, c'est l'histoire de ce cocu (Corse, depuis que la vertu règne à Bagdad) qui tue sa femme quand il apprend que son voisin n'a pas tué la sienne… Cette niaiserie —qui fit en son temps délirer Lacan— n'a qu'un aspect cognitif limité : le mari outragé *sait* qu'il doit résoudre une devinette.

[14] La logique des cocus corses attache une modalité à chaque cocu ; heureusement, elles n'ont pas de sonnette.

[15] Il s'agit d'une question idéologique, en effet, le chaos est déterministe en théorie, mais non-déterministe en pratique.

[16] *Idem* pout les « ismes » logiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle : constructivisme, prédicativisme. Il y a des choses qui « sont là », mais qui sont un peu immorales, peu ou mal calculables, ou justifiées à la diable, et qu'on dissimule. C'est un peu comme l'Enfer de la BN.

[17] Voir Paul, ce volume.

[18] Cf. le néologisme de Bourbaki « *la* mathématique ».

[19] Elle n'est pas injective, chaque point de l'image est visité *ad nauseam*.

[20] Caractérisations d'algèbres commutatives, comme espaces $\mathcal{C}(X)$ ou $\mathcal{L}^{\infty}(X,\mu)$.

[21] On a écrit des thèses pour démontrer que la cohérence de la cohérence… n'est pas équivalente à la cohérence, mais ça veut dire quoi, au juste ?

[22] En fait, *néo*-manichéisme : les « vrais » manichéens se jugeaient mauvais, impurs.

[23] Voir Longo, ce volume.

[24] Voir Teissier, ce volume ; on retiendra l'idée que des poulpes, du fait de leur mode de locomotion, auraient d'autres primitives que les entiers, e.g., des arbres.

[25] Nous refusons l'absolu du bien et du mal, alors que nous nous accommodons de l'absolu du vrai et du faux… peut-être parce ques les théologiens sont plus dignes que les prêtres.

[26] On remarquera la différence entre les James Bond aux titres imparfaits « Les diamants sont éternels », qui s'opposent aux titres parfaits du genre « Gunfight at the OK Corral ».

[27] Logique linéaire bornée, **LLL**, logique du —et en— temps polynomial.

[28] La définition de Dedekind de $\mathbb{N}$: « Le plus petit ensemble contenant 0 et clos par le successeur S » suppose la perénnité du successeur, i.e., qu'on puisse le réutiliser *ad nauseam*.