LIX, 1er Juin 2004

NOUVELLES
DU
TROISIEME
SOUS – SOL

Jean-Yves Girard

I-GÉNÉRALITÉS

I. 1-LES FONDEMENTS

- À l'ancienne : méta, métaméta,. . . Turtles all the way down.
- Nouveau régime sur trois sous-sols :

Niveau -1 : vrai/faux, prouvable/réfutable, cohérent/contradictoire ; théorème de Gödel.

Niveau -2 : fonctions, morphismes, catégories ; théorème de Church-Rosser, isomorphisme de Curry-Howard.

Niveau -3 : opérationalité, dynamique, exécution : ludique, géométrie de l'interaction.

- Le troisième sous-sol explique les autres niveaux :

Niveau -1 : à partir de la notion de gain.

Niveau -2 : à partir de l'associativité.

I. 2-LA GOI

- **Interprétation à prétention universelle : logique du second ordre, λ-calcul pur.**

  Preuve : **opérateur hermitien h sur un Hilbert $\mathcal{H}$: $h^* = h$, de norme au plus 1 : $\|h\| \leq 1$.**

  Coupure : **rétroaction σ. Une symétrie partielle : $\sigma^* = \sigma$, $\sigma^3 = \sigma$. σ induit une décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ correspond au projecteur σ^2.**

  Exécution : **solution de l'équation de rétroaction :**

$$h(x \oplus y) = x' \oplus \sigma(y)$$

entrée : x **sortie : x'** **calcul : y**

- **La forme normale est par définition $\sigma[\![h]\!](x) = x'$.**

I. 3-L'INVERSIBILITÉ

- $\sigma[\![h]\!]$ est un hermitien de $\mathcal{R}$ de norme au plus 1. $\|x'\|^2 + \|y\|^2 = \|x'\|^2 + \|\sigma(y)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$. Unicité de la partie visible x'.
- Si $h = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$, alors $\sigma[\![h]\!] = A + B^* \cdot (\sigma - C)^{-1} \cdot B \quad \ldots$
- $\ldots$ Pourvu que $\sigma - C$ soit inversible.
- L'injectivité ne coûte rien : l'espace $\mathcal{Z} = \ker(\sigma - C)$ des cycles reste inaccessible. On remplace C par $C - \mathcal{Z}$.
- On ne peut pas aller plus loin, sauf hypothèses logiques ad hoc (essentialistes) : $\sigma \cdot C$ est nilpotent, d'où l'inversibilité.

$$(\sigma - C)^{-1} = \sigma + \sigma \cdot C \cdot \sigma + \sigma \cdot C \cdot \sigma \cdot C \sigma + \ldots$$

I. 4-LA SOLUTION GÉNÉRALE

- Ne peut pas être littérale.
- Se base sur le cas inversible.
- Étendue par sup et inf au cas semi-inversible.
- Étendue par associativité au cas général.
- « **Solution** » valable dans toute algèbre de von Neumann.
- Revoir la GoI dans certaines algèbres (par exemple le facteur **hyperfini** de type $\mathbf{II_1}$).
- Nouvelle approche à $\mathbf{LLL}$?

II-LE GAIN

II. 1-LE BIPARTISME

- Graphe bipartite non-commutatif. Généralise la notion ludique de parité.
- On se donne une décomposition de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{P} \oplus \mathcal{N}$.
- $\mathbf{h}$ est bipartite quand il s'écrit $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$, avec $\mathbf{P} \geq 0$, $\mathbf{N} \leq 0$.
- Fait : l'inverse d'un bipartite est bipartite.
- Si $\mathbf{h}, \boldsymbol{\sigma}$ sont bipartites, de même pour $\boldsymbol{\sigma}[\![\mathbf{h}]\!]$.
- Utilisation du Principe de la Tortue.

II. 2-LE PREMIER SOUS-SOL

- $\mathbf{h}$ bipartite est gagnant quand les coefficients $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$ sont nuls.
- Exemple typique : un Fax : $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, où $\mathbf{u}$ est une isométrie de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{N}$.
- Gagner : rester bipartite quand on échange $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$.
- Le gain est préservé par forme normale.
- Questions de cohérence, de vérité, etc.

III-L'ORDRE PONCTUEL

III. 1-RAPPELS

- Un opérateur h est **hermitien** quand $\langle h(x) \mid x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- Il est **poisitif** quand $\langle h(x) \mid x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- h est positif ss'il est de la forme uu^*. On peut même supposer u positif : $h = (\sqrt{h})^2$.
- L'ordre **ponctuel** $f \leq g$ entre hermitiens est défini par $g - f \geq 0$.
- Pas un treillis : deux hermitiens ont un sup quand ils sont comparables !
- Toute partie filtrante bornée a un sup.
- La plupart des opérations ne sont pas croissantes (e.g. le carré). Mais la racine carrée est croissante.

III. 2-BONIFICATIONS

- Quid du statut topologique des sups filtrants ?
- Dana Scott : mauvaise topologie (jamais séparée).
- J.-Y. G. (espaces cohérents) : limites directes.
- Meilleure idée : bonificateur.
- Exemple, le théorème de Dini : si une suite croissante de fonctions continues sur un compact converge simplement vers une limite continue, la convergence est uniforme.
- Application (Lebesgue) : extension de l'intégrale des fonctions continues aux fonctions s.c.i. par passage au sup.
- De meme l'ordre ponctuel permet de bonifier une convergence faible en convergence forte.

III. 3-PLUSIEURS TOPOLOGIES

- Trois principales topologies, qui diffèrent quant à la continuité du produit. Plus une topologie est faible, moins elle a d'ouverts, et plus facilement on converge.

  Norme : $\|u_i - u\| \longrightarrow 0$. Le produit, l'adjoint sont continus, mais topologie « trop forte ».

  Forte : $\|u_i(x) - u(x)\| \longrightarrow 0$. L'adjoint n'est pas continu, mais le produit l'est, pourvu que les arguments restent bornés.

  Faible : $\langle u_i(x) - u(x) \mid y \rangle \longrightarrow 0$. L'adjoint est continu, mais pas le produit. Par contre la boule unité est compacte.

- Bonification : un sup filtrant (et donc limite faible) est en fait une limite forte.

III. 4-LE CAS SEMI-INVERSIBLE

- Semi-inversible inférieurement (supérieurement) : sup (inf) filtrant d'inversibles.
- Inversible = s.i.i. $\cap$ s.i.s.
- La forme normale dans le cas inversible est croissante : développement en série entière.
- Par bonification : elle commute aux sups filtrants.
- On peut donc l'étendre à tous les s.i.i. par sups.
- Idem pour les s.i.s. par infs.

III. 5-LA FIN DES HARICOTS

- **Lebesgue** : l'extension aux s.c.i. par sups commute aux infs filtrants. On étend alors aux infs de s.c.i. et on a fini.
- Tout système $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \sigma)$ est un inf de systémes s.i.i.
- Mais l'extension aus s.i.i. ne commute pas aux infs.
- Fin de la méthodologie « continuité par rapport à l'ordre ».

IV-L'ORDRE STABLE

IV. 1-UNE AUTRE RELATION D'ORDRE

- $(\mathcal{H}, \mathrm{g}, \sigma) \sqsubset (\mathcal{H}, \mathrm{h}, \sigma)$ **ssi** $\mathrm{k}\cdot\mathrm{h} = \mathrm{h}^2$ **et** $\mathrm{k}\cdot\sigma\cdot\mathrm{h} = \mathrm{h}\cdot\sigma\cdot\mathrm{h}$**.**
- **De façon équivalente : s'il existe un sous-espace fermé** $\mathcal{E}$ **tel que** $\mathcal{E}\cdot\sigma = \sigma\cdot\mathcal{E}$ **et** $\mathrm{h} = \mathrm{k}\cdot\mathcal{E}$**.**
- **Existence de produits fibrés : si** $\mathrm{f}, \mathrm{g} \sqsubset \mathrm{h}$**, il existe un inf** $\mathrm{f} \sqcap \mathrm{g}$**.**
- **Le produit fibré distribue sur le sup ponctuel.**
- **La forme normale préserve** $\sqsubset$ **et** $\sqcap$**.**
- **Existence d'incarnations.**
- **Pas de relation entre les deux ordres :**

$$\mathrm{f} \leq \mathrm{g} \Rightarrow -\mathrm{g} \leq -\mathrm{f}$$

$$\mathrm{f} \sqsubset \mathrm{g} \Rightarrow -\mathrm{f} \sqsubset -\mathrm{g}$$

V-L’ASSOCIATIVITÉ

V. 1-LE DEUXIÈME SOUS-SOL

- Retrouver un analogue de Church-Rosser, de la compositionalité.
- Deux coupures = une coupure, en d'autres termes, si σ, τ sont des rétroactions indépendantes, i.e., $\sigma \cdot \tau = 0$:

$$\sigma[\![\tau[\![\mathrm{h}]\!]]\!] = (\sigma + \tau)[\![\mathrm{h}]\!]$$

- L'associativité est vérifiée dans le cas inversible. S'étend par continuité aux sups dans le cas s.i.i.
- De même pour le cas s.i.s., mais l'associativité fait problème dans le cas semi-inversible (mélange de s.i.s. et s.i.i.).

V. 2-UN CHURCH-ROSSER QUANTIQUE

- Ecrire σ comme $\pi + \nu$, avec $\pi^2 = \pi$, $\nu^2 = -\nu$, $\pi \cdot \nu = 0$. Décomposition « non-commutative ».
- $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \sigma)$ est s.i.i. ssi $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \nu)$ est inversible. En particulier, $(\mathcal{H}, \mathrm{h}, \pi)$ est toujours s.i.i.
- En particulier les problème est complètement résolu dans le cas biaisé.
- Reste à montrer que : (π biaisée > 0, ν biaisée < 0)

$$\pi[\![\nu[\![\mathrm{h}]\!]]\!] = \nu[\![\pi[\![\mathrm{h}]\!]]\!]$$

- Avec des techniques d'ordre on obtient facilement l'inégalité :

$$\pi[\![\nu[\![\mathrm{h}]\!]]\!] \leq \nu[\![\pi[\![\mathrm{h}]\!]]\!]$$

V. 3-LA RÉSOLVANTE

- Une formule explicite dans la cas biaisé permet de conclure.
- Si $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ on peut trouver un unique ψ tel que

$$\sqrt{\pi - \mathbf{C}} \cdot \psi = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{dom}(\pi - \mathbf{C}) \cdot \psi = \psi$$

- On peut remplacer $\mathbf{h}$ par sa résolvante $\mathbf{res}(\mathbf{h}, \pi) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \psi^* \\ \psi & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- En effet, $\pi[\![\mathbf{h}]\!] = \pi[\![\mathbf{res}(\mathbf{h}, \pi)]\!]$.

V. 4-La Résolvante (suite et fin)

- **Dans le cas inversible,** $\psi = (\sigma - \mathrm{C})^{-1/2} \cdot \mathrm{B}$
- **Alors res**$(\mathrm{h}, \pi) = \mathrm{A} + \psi^* \cdot \psi = \mathrm{A} + \mathrm{B}^* \cdot (\sigma - \mathrm{C})^{-1} \cdot \mathrm{B}$