

NOUVELLES
DU
TROISIEME
SOUS – SOIL

Jean-Yves Girard

I-GÉNÉRALITÉS

I. 1-LES FONDEMENTS

- ▶ À l'ancienne : méta, métaméta,... **Turtles all the way down.**

- ▶ Nouveau régime sur trois sous-sols :

Niveau –1 : vrai/faux, prouvable/réfutable,
cohérent/contradictoire ; **théorème de Gödel.**

Niveau –2 : fonctions, morphismes, catégories ; **théorème de Church-Rosser, isomorphisme de Curry-Howard.**

Niveau –3 : opérationnalité, dynamique, exécution : **ludique, géométrie de l'interaction.**

- ▶ Le troisième sous-sol explique les autres niveaux :

Niveau –1 : à partir de la notion de **gain.**

Niveau –2 : à partir de l'**associativité.**

I. 2-LA GoI

- Interprétation à prétention universelle : logique du second ordre, λ -calcul pur.

Preuve : opérateur hermitien h sur un Hilbert $\mathcal{H}$: $h^* = h$, de norme au plus 1 : $\|h\| \leq 1$.

Coupure : rétroaction σ . Une symétrie partielle : $\sigma^* = \sigma$, $\sigma^3 = \sigma$. σ induit une décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ correspond au projecteur σ^2 .

Exécution : solution de l'équation de rétroaction :

$$h(x \oplus y) = x' \oplus \sigma(y)$$

entrée : x

sortie : x'

calcul : y

- La **forme normale** est par définition $\sigma[h](x) = x'$.

I. 3-L'INVERSIBILITÉ

- ▶ $\sigma[h]$ est un hermitien de $\mathcal{R}$ de norme au plus 1.
 $\|x'\|^2 + \|y\|^2 = \|x'\|^2 + \|\sigma(y)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$. Unicité de la partie visible x' .
- ▶ Si $h = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$, alors $\sigma[h] = A + B^* \cdot (\sigma - C)^{-1} \cdot B \dots$
- ▶ ... Pourvu que $\sigma - C$ soit **inversible**.
- ▶ L'injectivité ne coûte rien : l'espace $\mathcal{Z} = \ker(\sigma - C)$ des cycles reste inaccessible. On remplace C par $C - \mathcal{Z}$.
- ▶ On ne peut pas aller plus loin, sauf hypothèses logiques **ad hoc** (essentialistes) : $\sigma \cdot C$ est nilpotent, d'où l'inversibilité.

$$(\sigma - C)^{-1} = \sigma + \sigma \cdot C \cdot \sigma + \sigma \cdot C \cdot \sigma \cdot C \sigma + \dots$$

I. 4-LA SOLUTION GÉNÉRALE

- ▶ Ne peut pas être littérale.
- ▶ Se base sur le cas inversible.
- ▶ Étendue par sup et inf au cas semi-inversible.
- ▶ Étendue par associativité au cas général.
- ▶ « **Solution** » valable dans toute algèbre de von Neumann.
- ▶ Revoir la Gol dans certaines algèbres (par exemple le facteur **hyperfini** de type **II₁**).
- ▶ Nouvelle approche à **LLL** ?

II-LE GAIN

II. 1-LE BIPARTISME

- ▶ Graphe bipartite non-commutatif. Généralise la notion ludique de **parité**.
- ▶ On se donne une décomposition de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{P} \oplus \mathcal{N}$.
- ▶ h est **bipartite** quand il s'écrit $\begin{bmatrix} P & Q^* \\ Q & N \end{bmatrix}$, avec $P \geq 0, N \leq 0$.
- ▶ Fait : l'inverse d'un bipartite est bipartite.
- ▶ Si h, σ sont bipartites, de même pour $\sigma[h]$.
- ▶ Utilisation du **Principe de la Tortue**.

II. 2-LE PREMIER SOUS-SOL

- ▶ **h** bipartite est **gagnant** quand les coefficients **P** et **N** sont nuls.
- ▶ Exemple typique : un **Fax** :
$$\begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix}$$
, où **u** est une isométrie de **P** sur **N**.
- ▶ Gagner : rester bipartite quand on échange **P** et **N**.
- ▶ Le gain est préservé par forme normale.
- ▶ Questions de cohérence, de vérité, etc.

III-L'ORDRE PONCTUEL

III. 1-RAPPELS

- ▶ Un opérateur h est **hermitien** quand $\langle h(x) | x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- ▶ Il est **positif** quand $\langle h(x) | x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- ▶ h est positif ss'il est de la forme uu^* . On peut même supposer u positif : $h = (\sqrt{h})^2$.
- ▶ L'ordre **ponctuel** $f \leq g$ entre hermitiens est défini par $g - f \geq 0$.
- ▶ Pas un treillis : deux hermitiens ont un sup quand ils sont comparables !
- ▶ Toute partie filtrante bornée a un sup.
- ▶ La plupart des opérations ne sont pas croissantes (e.g. le carré). Mais la racine carrée est croissante.

III. 2-BONIFICATIONS

- ▶ **Quid** du statut topologique des sups filtrants ?
- ▶ Dana Scott : mauvaise topologie (jamais séparée).
- ▶ J.-Y. G. (espaces cohérents) : limites directes.
- ▶ Meilleure idée : **bonificateur**.
- ▶ Exemple, le **théorème de Dini** : si une suite **croissante** de fonctions continues sur un compact converge **simplement** vers une limite **continue**, la convergence est **uniforme**.
- ▶ Application (Lebesgue) : extension de l'intégrale des fonctions continues aux fonctions s.c.i. par passage au sup.
- ▶ De meme l'ordre ponctuel permet de bonifier une convergence **faible** en convergence **forte**.

III. 3-PLUSIEURS TOPOLOGIES

- Trois principales topologies, qui diffèrent quant à la continuité du produit. Plus une topologie est faible, moins elle a d'ouverts, et plus facilement on converge.

Norme : $\|u_i - u\| \rightarrow 0$. Le produit, l'adjoint sont continus, mais topologie « **trop forte** ».

Forte : $\|u_i(x) - u(x)\| \rightarrow 0$. L'adjoint n'est pas continu, mais le produit l'est, pourvu que les arguments restent bornés.

Faible : $\langle u_i(x) - u(x) | y \rangle \rightarrow 0$. L'adjoint est continu, mais pas le produit. Par contre la boule unité est compacte.

- Bonification : un sup filtrant (et donc limite faible) est en fait une limite forte.

III. 4-LE CAS SEMI-INVERSIBLE

- ▶ **Semi-inversible inférieurement** (supérieurement) : sup (inf) filtrant d'inversibles.
- ▶ Inversible = s.i.i. $\cap$ s.i.s.
- ▶ La forme normale dans le cas inversible est **croissante** : développement en série entière.
- ▶ Par bonification : elle commute aux sups filtrants.
- ▶ On peut donc l'étendre à tous les **s.i.i.** par sups.
- ▶ Idem pour les s.i.s. par infs.

III. 5-LA FIN DES HARICOTS

- ▶ **Lebesgue** : l'extension aux s.c.i. par sups commute aux infs filtrants. On étend alors aux infs de s.c.i. et on a fini.
- ▶ Tout système $(\mathcal{H}, h, \sigma)$ est un inf de systèmes s.i.i.
- ▶ Mais l'extension aux s.i.i. ne commute pas aux infs.
- ▶ Fin de la méthodologie « **continuité par rapport à l'ordre** ».

IV-L'ORDRE STABLE

IV. 1-UNE AUTRE RELATION D'ORDRE

- ▶ $(\mathcal{H}, g, \sigma) \sqsubset (\mathcal{H}, h, \sigma)$ ssi $k \cdot h = h^2$ et $k \cdot \sigma \cdot h = h \cdot \sigma \cdot h$.
- ▶ De façon équivalente : s'il existe un sous-espace fermé $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} \cdot \sigma = \sigma \cdot \mathcal{E}$ et $h = k \cdot \mathcal{E}$.
- ▶ Existence de **produits fibrés** : si $f, g \sqsubset h$, il existe un $\inf f \sqcap g$.
- ▶ Le produit fibré distribue sur le sup ponctuel.
- ▶ La forme normale préserve $\sqsubset$ et $\sqcap$.
- ▶ Existence d'**incarnations**.
- ▶ Pas de relation entre les deux ordres :

$$f \leq g \Rightarrow -g \leq -f$$

$$f \sqsubset g \Rightarrow -f \sqsubset -g$$

V-L'ASSOCIATIVITÉ

V. 1-LE DEUXIÈME SOUS-SOL

- Retrouver un analogue de Church-Rosser, de la compositionnalité.
- Deux coupures = une coupure, en d'autres termes, si σ, τ sont des rétroactions **indépendantes**, i.e., $\sigma \cdot \tau = 0$:

$$\sigma \llbracket \tau \llbracket h \rrbracket \rrbracket = (\sigma + \tau) \llbracket h \rrbracket$$

- L'associativité est vérifiée dans le cas inversible. S'étend par continuité aux sups dans le cas s.i.i.
- De même pour le cas s.i.s., mais l'associativité fait problème dans le cas semi-inversible (mélange de s.i.s. et s.i.i.).

V. 2-UN CHURCH-ROSSER QUANTIQUE

- Ecrire σ comme $\pi + \nu$, avec $\pi^2 = \pi$, $\nu^2 = -\nu$, $\pi \cdot \nu = 0$.
Décomposition « **non-commutative** ».
- $(\mathcal{H}, \mathbf{h}, \sigma)$ est s.i.i. ssi $(\mathcal{H}, \mathbf{h}, \nu)$ est inversible. En particulier, $(\mathcal{H}, \mathbf{h}, \pi)$ est toujours s.i.i.
- En particulier le problème est complètement résolu dans le cas **biaisé**.
- Reste à montrer que : $(\pi \text{ biaisée} > 0, \nu \text{ biaisée} < 0)$

$$\pi[\nu[\mathbf{h}]] = \nu[\pi[\mathbf{h}]]$$

- Avec des techniques d'ordre on obtient facilement l'inégalité :

$$\pi[\nu[\mathbf{h}]] \leq \nu[\pi[\mathbf{h}]]$$

V. 3-LA RÉSOLVANTE

- Une formule explicite dans la cas biaisé permet de conclure.

- Si $h = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ on peut trouver un unique ψ tel que

$$\sqrt{\pi - C} \cdot \psi = B$$

$$\text{dom}(\pi - C) \cdot \psi = \psi$$

- On peut remplacer h par sa **résolvante** $\text{res}(h, \pi) = \begin{bmatrix} A & \psi^* \\ \psi & 0 \end{bmatrix}$

- En effet, $\pi[h] = \pi[\text{res}(h, \pi)]$.

V. 4-LA RÉSVOLVANTE (SUITE ET FIN)

- Dans le cas inversible, $\psi = (\sigma - C)^{-1/2} \cdot B$
- Alors $\text{res}(h, \pi) = A + \psi^* \cdot \psi = A + B^* \cdot (\sigma - C)^{-1} \cdot B$