

LIX, 1er Juin 2004

NOUVELLES  
DU  
TROISIEME  
SOUS – SOL

Jean-Yves Girard

LIX, 1er Juin 2004

# I-GÉNÉRALITÉS

## I. 1-LES FONDEMENTS

- ▶ À l'ancienne : méta, métaméta,... **Turtles all the way down.**
- ▶ Nouveau régime sur trois sous-sols :
  - Niveau –1 : vrai/faux, prouvable/réfutable,**  
**cohérent/contradictoire ; théorème de Gödel.**
  - Niveau –2 : fonctions, morphismes, catégories ; théorème de Church-Rosser, isomorphisme de Curry-Howard.**
  - Niveau –3 : opérationnalité, dynamique, exécution : ludique,**  
**géométrie de l'interaction.**
- ▶ Le troisième sous-sol explique les autres niveaux :
  - Niveau –1 : à partir de la notion de gain.**
  - Niveau –2 : à partir de l'associativité.**

## I. 2-LA Gol

- ▶ Interprétation à prétention universelle : logique du second ordre,  $\lambda$ -calcul pur.

**Preuve :** opérateur hermitien  $\mathbf{h}$  sur un Hilbert  $\mathcal{H}$  :  $\mathbf{h}^* = \mathbf{h}$ , de norme au plus 1 :  $\|\mathbf{h}\| \leq 1$ .

**Coupe :** rétroaction  $\sigma$ . Une symétrie partielle :  $\sigma^* = \sigma$ ,  $\sigma^3 = \sigma$ .  $\sigma$  induit une décomposition en somme directe  $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$  où  $\mathcal{S}$  correspond au projecteur  $\sigma^2$ .

**Exécution :** solution de l'équation de rétroaction :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \mathbf{x}' \oplus \sigma(\mathbf{y})$$

entrée :  $\mathbf{x}$

sortie :  $\mathbf{x}'$

calcul :  $\mathbf{y}$

- ▶ La forme normale est par définition  $\sigma[\![\mathbf{h}]\!](\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ .

## I. 3-L'INVERSIBILITÉ

- ▶  $\sigma[h]$  est un hermitien de  $\mathcal{R}$  de norme au plus 1.  
 $\|x'\|^2 + \|y\|^2 = \|x'\|^2 + \|\sigma(y)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ . Unicité de la partie visible  $x'$ .
- ▶ Si  $h = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ , alors  $\sigma[h] = A + B^* \cdot (\sigma - C)^{-1} \cdot B$  ...
- ▶ ... Pourvu que  $\sigma - C$  soit inversible.
- ▶ L'injectivité ne coûte rien : l'espace  $\mathcal{Z} = \ker(\sigma - C)$  des cycles reste inaccessible. On remplace  $C$  par  $C - \mathcal{Z}$ .
- ▶ On ne peut pas aller plus loin, sauf hypothèses logiques ad hoc (essentialistes) :  $\sigma \cdot C$  est nilpotent, d'où l'inversibilité.

$$(\sigma - C)^{-1} = \sigma + \sigma \cdot C \cdot \sigma + \sigma \cdot C \cdot \sigma \cdot C \sigma + \dots$$

## I. 4-LA SOLUTION GÉNÉRALE

- ▶ Ne peut pas être littérale.
- ▶ Se base sur le cas inversible.
- ▶ Étendue par sup et inf au cas semi-inversible.
- ▶ Étendue par associativité au cas général.
- ▶ « **Solution** » valable dans toute algèbre de von Neumann.
- ▶ Revoir la Gol dans certaines algèbres (par exemple le facteur hyperfini de type **II<sub>1</sub>**).
- ▶ Nouvelle approche à **LLL** ?

LIX, 1er Juin 2004

# II-LE GAIN

## II. 1-LE BIPARTISME

- ▶ Graphe bipartite non-commutatif. Généralise la notion ludique de parité.
- ▶ On se donne une décomposition de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{P} \oplus \mathcal{N}$ .
- ▶  $\mathbf{h}$  est bipartite quand il s'écrit  $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$ , avec  $\mathbf{P} \geq 0, \mathbf{N} \leq 0$ .
- ▶ Fait : l'inverse d'un bipartite est bipartite.
- ▶ Si  $\mathbf{h}, \sigma$  sont bipartites, de même pour  $\sigma[\mathbf{h}]$ .
- ▶ Utilisation du Principe de la Tortue.

## II. 2-LE PREMIER SOUS-SOL

- ▶ **h bipartite est gagnant quand les coefficients P et N sont nuls.**
- ▶ Exemple typique : un Fax :  $\begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix}$ , où **u** est une isométrie de **P** sur **N**.
- ▶ Gagner : rester bipartite quand on échange **P** et **N**.
- ▶ Le gain est préservé par forme normale.
- ▶ Questions de cohérence, de vérité, etc.

LIX, 1er Juin 2004

# III-L'ORDRE PONCTUEL

### III. 1-RAPPELS

- ▶ Un opérateur  $h$  est hermitien quand  $\langle h(x) | x \rangle \in \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathcal{H}$ .
- ▶ Il est positif quand  $\langle h(x) | x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{H}$ .
- ▶  $h$  est positif ss'il est de la forme  $uu^*$ . On peut même supposer  $u$  positif :  $h = (\sqrt{h})^2$ .
- ▶ L'ordre ponctuel  $f \leq g$  entre hermitiens est défini par  $g - f \geq 0$ .
- ▶ Pas un treillis : deux hermitiens ont un sup quand ils sont comparables !
- ▶ Toute partie filtrante bornée a un sup.
- ▶ La plupart des opérations ne sont pas croissantes (e.g. le carré). Mais la racine carrée est croissante.

### III. 2-BONIFICATIONS

- ▶ **Quid du statut topologique des supers filtrants ?**
- ▶ **Dana Scott : mauvaise topologie (jamais séparée).**
- ▶ **J.-Y. G. (espaces cohérents) : limites directes.**
- ▶ **Meilleure idée : bonificateur.**
- ▶ **Exemple, le théorème de Dini : si une suite croissante de fonctions continues sur un compact converge simplement vers une limite continue, la convergence est uniforme.**
- ▶ **Application (Lebesgue) : extension de l'intégrale des fonctions continues aux fonctions s.c.i. par passage au sup.**
- ▶ **De même l'ordre ponctuel permet de bonifier une convergence faible en convergence forte.**

### III. 3-PLUSIEURS TOPOLOGIES

- ▶ Trois principales topologies, qui diffèrent quant à la continuité du produit. Plus une topologie est faible, moins elle a d'ouverts, et plus facilement on converge.

**Norme** :  $\|u_i - u\| \rightarrow 0$ . Le produit, l'adjoint sont continus, mais topologie « trop forte ».

**Forte** :  $\|u_i(x) - u(x)\| \rightarrow 0$ . L'adjoint n'est pas continu, mais le produit l'est, pourvu que les arguments restent bornés.

**Faible** :  $\langle u_i(x) - u(x) | y \rangle \rightarrow 0$ . L'adjoint est continu, mais pas le produit. Par contre la boule unité est compacte.

- ▶ Bonification : un sup filtrant (et donc limite faible) est en fait une limite forte.

### III. 4-LE CAS SEMI-INVERSIBLE

- ▶ **Semi-inversible inférieurement (supérieurement) : sup (inf) filtrant d'inversibles.**
- ▶ **Inversible = s.i.i.  $\cap$  s.i.s.**
- ▶ **La forme normale dans le cas invisible est croissante : développement en série entière.**
- ▶ **Par bonification : elle commute aux supers filtrants.**
- ▶ **On peut donc l'étendre à tous les s.i.i. par supers.**
- ▶ **Idem pour les s.i.s. par infs.**

### III. 5-LA FIN DES HARICOTS

- ▶ **Lebesgue** : l'extension aux s.c.i. par supers commute aux infs filtrants. On étend alors aux infs de s.c.i. et on a fini.
- ▶ Tout système  $(\mathcal{H}, h, \sigma)$  est un inf de systèmes s.i.i.
- ▶ Mais l'extension aus s.i.i. ne commute pas aux infs.
- ▶ Fin de la méthodologie « continuité par rapport à l'ordre ».

LIX, 1er Juin 2004

# IV-L'ORDRE STABLE

## IV. 1-UNE AUTRE RELATION D'ORDRE

- ▶  $(\mathcal{H}, g, \sigma) \sqsubset (\mathcal{H}, h, \sigma)$  ssi  $k \cdot h = h^2$  et  $k \cdot \sigma \cdot h = h \cdot \sigma \cdot h$ .
- ▶ De façon équivalente : s'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{E}$  tel que  $\mathcal{E} \cdot \sigma = \sigma \cdot \mathcal{E}$  et  $h = k \cdot \mathcal{E}$ .
- ▶ Existence de produits fibrés : si  $f, g \sqsubset h$ , il existe un  $\inf f \sqcap g$ .
- ▶ Le produit fibré distribue sur le sup ponctuel.
- ▶ La forme normale préserve  $\sqsubset$  et  $\sqcap$ .
- ▶ Existence d'incarnations.
- ▶ Pas de relation entre les deux ordres :

$$f \leq g \Rightarrow -g \leq -f$$

$$f \sqsubset g \Rightarrow -f \sqsubset -g$$

LIX, 1er Juin 2004

# V-L'ASSOCIATIVITÉ

## V. 1-LE DEUXIÈME SOUS-SOL

- ▶ Retrouver un analogue de Church-Rosser, de la compositionnalité.
- ▶ Deux coupures = une coupure, en d'autres termes, si  $\sigma, \tau$  sont des rétroactions indépendantes, i.e.,  $\sigma \cdot \tau = 0$  :

$$\sigma[\tau[h]] = (\sigma + \tau)[h]$$

- ▶ L'associativité est vérifiée dans le cas inversible. S'étend par continuité aux sups dans le cas s.i.i.
- ▶ De même pour le cas s.i.s., mais l'associativité fait problème dans le cas semi-inversible (mélange de s.i.s. et s.i.i.).

## V. 2-UN CHURCH-ROSSER QUANTIQUE

- ▶ Ecrire  $\sigma$  comme  $\pi + \nu$ , avec  $\pi^2 = \pi$ ,  $\nu^2 = -\nu$ ,  $\pi \cdot \nu = 0$ .  
Décomposition « non-commutative ».
- ▶  $(\mathcal{H}, h, \sigma)$  est s.i.i. ssi  $(\mathcal{H}, h, \nu)$  est inversible. En particulier,  $(\mathcal{H}, h, \pi)$  est toujours s.i.i.
- ▶ En particulier les problème est complètement résolu dans le cas biaisé.
- ▶ Reste à montrer que : ( $\pi$  biaisée  $> 0$ ,  $\nu$  biaisée  $< 0$ )

$$\pi[\nu[h]] = \nu[\pi[h]]$$

- ▶ Avec des techniques d'ordre on obtient facilement l'inégalité :

$$\pi[\nu[h]] \leq \nu[\pi[h]]$$

## V. 3-LA RÉSOLVANTE

- ▶ Une formule explicite dans la cas biaisé permet de conclure.
- ▶ Si  $h = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$  on peut trouver un unique  $\psi$  tel que

$$\sqrt{\pi - C} \cdot \psi = B$$

$$\text{dom}(\pi - C) \cdot \psi = \psi$$

- ▶ On peut remplacer  $h$  par sa résolvante  $\text{res}(h, \pi) = \begin{bmatrix} A & \psi^* \\ \psi & 0 \end{bmatrix}$
- ▶ En effet,  $\pi[h] = \pi[\text{res}(h, \pi)]$ .

## V. 4-LA RÉSOLVANTE (SUITE ET FIN)

- ▶ **Dans le cas inversible,**  $\psi = (\sigma - C)^{-1/2} \cdot B$
- ▶ **Alors**  $\text{res}(h, \pi) = A + \psi^* \cdot \psi = A + B^* \cdot (\sigma - C)^{-1} \cdot B$