

LES FONDÉMENTS MATHEMATIQUES

Jean-Yves Girard

FORMALISMES

En mathématiques le XX^{ème} siècle commence vers 1890... .

1 LA THÉORIE DES ENSEMBLES

- ▶ XIX^{ème} siècle, réflexion sur l'**analyse** (fonctions, dérivées, intégrales). **Passagers clandestins** : « **courbe** » sans tangente...
- ▶ Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? La Théorie des Ensembles de Cantor répond (?) à cette question. Les objets compliqués (nombres **réels**) reconstruits à partir des nombres entiers... qui sont eux-mêmes « définis » à partir de rien (?).
- ▶ La Physique, faite d'îlots reliés par des passerelles incertaines. Par contre unité **de principe** de **la** mathématique. Analyse et **algèbre** (le calcul avec des lettres, des variables, des équations) ne se contredisent pas.
- ▶ Rôle central dévolu aux entiers naturels ; l'arithmétique de Peano **AP**, un des premiers exemples de **système formel**.

2 L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO AP

Termes : 0 $x, y, z, \dots$ St $t + t'$ $t \times t'$
 (zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Propositions :

$t = t'$ $\neg P$ $P \vee P'$ $P \wedge P'$ $P \Rightarrow P'$ $\forall xP$ $\exists xP$
 (égale, non, ou, et, implique, pour tout, il existe)

Axiomes : $P \Rightarrow P$ $x = x$ $\dots$ **(Logique)**

$x + 0 = x$ $x + Sy = S(x + y)$ $x \times 0 = 0$ $x \times Sy = (x \times y) + x$

$Sx \neq 0$ $Sx = Sy \Rightarrow x = y$ **(arithmétique).**

Règles de démonstration :

P $P \Rightarrow Q$

Q

$P[0]$ $P[x] \Rightarrow P[Sx]$

$P[y]$

Théorèmes : $SSS0 + SSO = SSSSSO$ $\forall x (0 + x = x)$

3 MATHÉMATIQUES VS. INFORMATIQUE

- ▶ Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement **formalisables**, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.
- ▶ L'activité de l'ordinateur est purement **formelle** : **syntax error**.
- ▶ Le langage mathématique est un langage informatique **exécuté** en appliquant les règles de déduction. Analogie précieuse qui ne concerne que l'**aspect formel** des mathématiques.
- ▶ Le dilemme du bus : attendre ou rentrer à pied ? Le problème de l'**arrêt** des programmes. La machine peut-elle tester sa « **mise en boucle** » (le programme mouline à l'infini, sans résultat visible) ?
- ▶ Réponse négative :

Ne pas savoir $\neq$ Savoir que non
Récessif $\neq$ Expansif

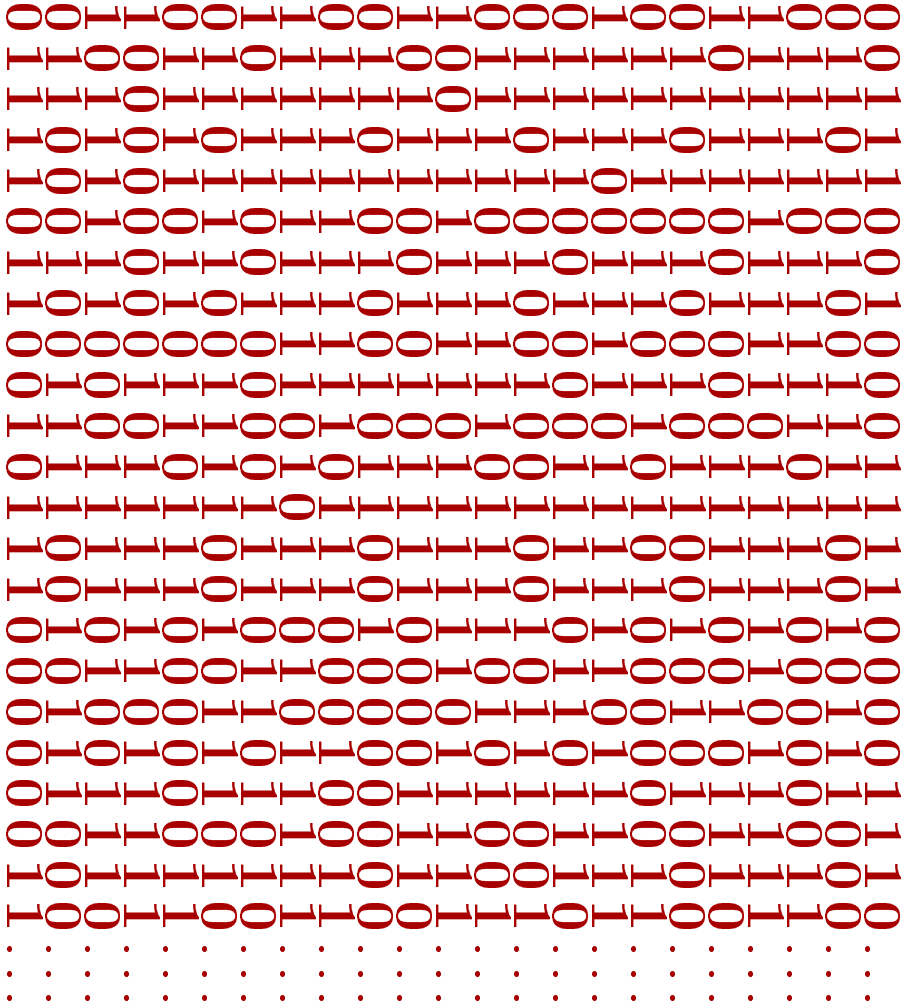
PARADOXES

Est-ce grave, Docteur ?

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

- ▶ Le **paradoxe** natif ~ 1880 ; ($\delta\delta\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition...).
- ▶ Liste *finie* de tous les mots de la langue française.
- ▶ Liste *infinie* des entiers pairs : $0, 2, 4, 6, \dots$
- ▶ Liste *infinie* de tous les programmes d'un langage :
Taille : Rangés par taille croissante.
Dictionnaire : À taille donnée, rangée dans l'ordre lexicographique.
- ▶ Liste de **toutes** les listes infinies de zéros et de uns ? Impossible, à cause de l'**argument diagonal**. Soient $L_1, L_2, L_3, \dots$ **toutes** les listes infinies ; on les range l'une sur l'autre, et...

4 LA DIAGONALE DE CANTOR



4 LA DIAGONALE DE CANTOR

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

A 20x20 grid of red and blue circles and vertical lines, with a grid of dots below it.

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

5 L'EXPANSIVITÉ

- ▶ Peut-on traiter des informations **négatives** (absentes) ?
- ▶ Argument « **pour** » : cases optionnelles non remplies, lues comme **non**.
- ▶ Argument non valable : **Retour**, qui veut dire « Je ne réponds pas ». Sinon attente du bus... C'est en fait le **problème d'arrêt**.
Démonstration rigoureuse en utilisant la machine à Cantor.
- ▶ Le langage est donc **expansif**, il ne fabrique que des informations positives. Penser à une recherche de fichiers.
- ▶ Le formalisme mathématique est expansif : il **accumule** les théorèmes. Ce n'est pas le cas de la médecine.

6 LES PARADOXES

- ▶ Paradoxes de l'intuition : « **courbe** » de Peano qui passe par tous les points d'une surface.
- ▶ Paradoxes du raisonnement : contradiction dans la théorie **naïve** des ensembles (« corrigée » depuis). Russell (1905) : soit $X = \{x; x \notin x\}$; contradiction car à la fois $X \in X$ et $X \notin X$, une proposition et sa négation (toujours la machine à Cantor). Parmi les principes logiques : $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$: **d'une contradiction on déduit n'importe quoi**... Le **ressort** du formalisme est brisé.
- ▶ Hilbert (1900) : **démontrer** la **cohérence** (non-contradiction) de l'arithmétique. Récidive vers 1920 avec un programme **finitiste**. **Réduction** de la question aux seuls paradoxes formels.

FORMALISTES

Zorro est arrivé...

7 LA RÉCESSIVITÉ

- ▶ **Démontrer** la cohérence des mathématiques dans les mathématiques : une espèce d'**auto-amnistie**, atténuée par la restriction des méthodes permises.
- ▶ On n'a droit qu'aux opérations et aux raisonnements « **finis** », un tout petit bout de **AP**, une sorte de... **commission parlementaire**.
- ▶ Restriction aux seules propriétés **récessives**. Identités $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, $abc \neq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \neq c^3$, etc.
- ▶ Par exemple on **montrerait** qu'un théorème a toujours un nombre pair de symboles ; si **P** est démontrable, $\neg P$ en a un nombre impair et n'est pas démontrable... **Trop naïf !**

8 LE POPPERISME

- ▶ Popper, philosophe néo-positiviste, reprend les idées de Hilbert. Un énoncé scientifique n'a de valeur que s'il existe un protocole capable —en principe— de le **prendre en défaut**.
- ▶ Vérification des lois de la nature à un certain **degré de précision**. Mais aussi « **jusqu'ici ça va** ».
- ▶ En mathématiques, vérifier à la précision $1/N$, c'est vérifier jusqu'à l'entier N : Hilbert/Popper, même combat. Le « récessif » typique, c'est la cohérence : « **jusqu'ici pas de contradiction** ».
- ▶ Une propriété est expansive quand sa négation est récessive. Exemple « **être démontrable** » vs. « **être cohérent** ».

INCOMPLÉTUDE

Non, c'était Gödel...

9 LE THÉORÈME DE GÖDEL

- ▶ Le formalisme est lui-même un objet **mathématique**, remarque Hilbert, **nécessaire au programme**, à sa rigueur. Remarque prise au sérieux par le logicien Gödel en 1931.
- ▶ Les **objets** du formalisme de **AP**, termes, propositions, sont représentés par des **nombre de Gödel** : $\ulcorner t \urcorner, \ulcorner P \urcorner$. « **Banale** » énumération des propositions. Numérolgues s'abstenir.
- ▶ Les **propriétés** du formalisme sont représentées par des **propositions** de l'arithmétique de Peano **AP**, ainsi « P est démontrable » devient $\ulcorner P \urcorner$, « **AP** est cohérente » devient $\ulcorner Coh \urcorner$. Pas de sens arithmétique immédiat.
- ▶ Proposition $G \sim \neg \ulcorner Thm_{AP} \urcorner [\ulcorner G \urcorner]$: « **Je ne suis pas prouvable** »
Le paradoxe du menteur « **Je mens** » ?...

10 LE THÉORÈME DE GÖDEL (SUITE)

- ▶ ... Non, car qui nous dit que vérité et prouvabilité coïncident ?
En fait G est **vraie et non prouvable** dans **AP**.
- ▶ On peut remplacer G par la cohérence de **AP**.
« **Si AP est cohérente elle ne prouve pas sa propre cohérence** ».
- ▶ Coh_{AP} : proposition récessive ; **prouvabilité** de Coh_{AP} : proposition expansive. (Cf. le **problème d'arrêt** : se mettre en boucle c'est récessif, détecter une boucle, c'est expansif.)
- ▶

Récessif $\neq$ Expansif
Vrai $\neq$ Prouvable
 P Non Démontrable $\neq \neg P$ Démontrable.

11 NÉGATIONS ET NÉGATIONNISTES

- ▶ Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « **Tout est faux, il suffit d'attendre** ».
- ▶ Tentation du **gaz sarin** ; mais n'est pas le C^e Nemo qui veut. . .
- ▶ Une réfutation du théorème le prouverait ; doit-on lui **dénier toute valeur** ?
- ▶ Béatifier Gödel ? **Délire** suspect autour du 2nd théorème. Nombres mystérieux, Gödel-Escher-Bach,...
- ▶ **On ne revise pas ses lunettes en les gardant sur le nez.**
- ▶ L'idéologie **formaliste** de Hilbert finit par se réfuter elle-même par saturation scientifique : **démontrer la cohérence** dans les **mathématiques**. Vous l'avez voulu, Georges Dandin !

INTUITIONISMES

Pendant que Dupond et Dupont progressaient hardiment. . .

12 LE POST-GÖDELISME

- ▶ Kreisel : les **doutes** quant à la cohérence sont plus **douteux** que la cohérence elle-même.
- ▶ Poursuite des démonstrations de cohérence : **l'assurance contre l'explosion de la Terre**, un produit indémodable.
- ▶ Réussite paradoxale du logicien Gentzen dans les années 1930, à comparer au **surgeon** d'un arbre mort.
- ▶ Lecture moderne de Gentzen : interaction entre une preuve de **P** et une de **$\neg P$** . Identique à l'interaction entre programme et environnement, argument et fonction. **Curry-Howard** $\sim$ 1970.
- ▶ Logique **linéaire** (1985) : symétrie programme/environnement. Logique **procédurale**, et non plus **réaliste**. Les démonstrations deviennent des procédures appelées **desseins**.

13 LA LUDIQUE OU L'EXTINCTION DU POPPERISME

- ▶ Deux machines $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ discutent en vase clos. Chacune peut choisir un **dessein**, i.e. un programme qui « **teste l'autre** » et soit :

Consensus : L'une des deux finit par jeter l'éponge.

Dissensus : Elles se chamaillent à l'infini.

- ▶ Comportements **duaux** de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{M}$ ne se permet que les desseins « **consensuels** » avec les desseins de $\mathfrak{N}$, et **vice-versa**.

- ▶ Ces tests sont sujets... à test (dissensus = **récusation réciproque**). Sortie du carcan **récessif/expansif**.

- ▶ Dessein = démonstration avec « **erreurs de logique** » : le **daimon** $\mathfrak{H}$, celui qui jette l'éponge. **Dualité moniste** et sortie du réalisme.

(à suivre)

14 SUPPLÉMENT DÉTACHABLE

- ▶ L'incomplétude est **interne**.
- ▶ La vérité est-elle une **paraphrase** vide ?
- ▶ La réalité des entiers : les opérations sont elles définies sur les objets ou les objets ne sont-ils qu'une **réification** des opérations ?
- ▶ «
» Problème du millénium » :

P vs. NP