

Jean-Yves Girard

FONDÉS
PAR
MATTHIEU
MAITIQUES

FORMALISMES

En mathématiques le XX^e siècle commence vers 1890...

1 LA THÉORIE DES ENSEMBLES

UTLS 17 Juin 2000

- ▶ XIX^e siècle, réflexion sur l'**analyse** (fonctions, dérivées, intégrales). **Passagers clandestins** : « **courbe** » sans tangente... .
- ▶ Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? La Théorie des Ensembles de Cantor répond (?) à cette question. Les objets compliqués (**nombres réels**) reconstruits à partir des nombres entiers... qui sont eux-mêmes « **définis** » à partir de rien (?).
- ▶ La Physique, faite d'ilôts reliés par des passerelles incertaines.
- ▶ Par contre unité **de principe** de la mathématique. Analyse et **algèbre** (le calcul avec des lettres, des variables, des équations) ne se contredisent pas.
- ▶ Rôle central dévolu aux entiers naturels ; l'arithmétique de Peano **AP**, un des premiers exemples de **système formel**.

2 L'ARITHMÉTIQUE DE PEAÑO AP

UTLS 17 Juin 2000

Termes : 0 x, y, z, \dots St $t + t'$ $t \times t'$

(zéro, variables, successeur (+1), somme, produit)

Propositions :

$$t = t' \quad \neg P \quad P \vee P' \quad P \wedge P' \quad P \Rightarrow P' \quad \forall x P \quad \exists x P$$

(égalé, non, ou, et, implique, pour tout, il existe)

Axiomes : $P \Rightarrow P$ $x = x$ \dots (logique)

$$x + 0 = x \quad x + Sy = S(x + y) \quad x \times 0 = 0 \quad x \times Sy = (x \times y) + x$$

$$Sx \neq 0 \quad Sx = Sy \Rightarrow x = y \quad (\text{arithmétique}).$$

Règles de démonstration :

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

$$\frac{P[0] \quad P[x] \Rightarrow P[Sx]}{P[y]}$$

$$\text{Théorèmes : } SSS0 + SS0 = SSSSS0 \quad \forall x (0 + x = x)$$

3 MATHÉMATIQUES VS. INFORMATIQUE

UTLS 17 Juin 2000

- ▶ Les mathématiques ne sont pas formelles, elles sont seulement **formalisables**, vérifiables (mais pas réalisables) sur machine.
- ▶ L'activité de l'ordinateur est purement **formelle** : **syntax error**.
- ▶ Le langage mathématique est un langage informatique **exécuté** en appliquant les règles de déduction. Analogie précieuse qui ne concerne que l'**aspect formel** des mathématiques.
- ▶ Le dilemme du bus : attendre ou rentrer à pied ? Le problème de **l'arrêt** des programmes. La machine peut-elle tester sa « **mise en boucle** » (le programme mouline à l'infini, sans résultat visible) ?
- ▶ Réponse négative :
 - Ne pas savoir \neq Savoir que non**
 - Récessif \neq Expansif**

PARADOXES

Est-ce grave, Docteur ?

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

UTLS 17 Juin 2000

- ▶ Le **paradoxe** natif ~ 1880 ; ($\delta\acute{o}\xi\alpha$: dogme, opinion, intuition. . .).
- ▶ Liste *finie* de tous les mots de la langue française.
- ▶ Liste *infinie* des entiers pairs : $0, 2, 4, 6, \dots$.
- ▶ Liste *infinie* de tous les programmes d'un langage :

 - Taille** : Rangés par taille croissante.
 - Dictionnaire** : À taille donnée, rangée dans l'ordre lexicographique.

- ▶ Liste de **toutes** les listes infinies de zéros et de uns ? Impossible, à cause de l'**argument diagonal**. Soient L_1, L_2, L_3, \dots toutes les listes infinies ; on les range l'une sur l'autre, et. . .

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

OOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OOOOOOOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OOOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
HHOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
OOOOHHOOHHOOHHOOHHOOHHOO
...

4 LA DIAGONALE DE CANTOR

The figure displays a 10x10 grid of DNA double helix structures. The grid is organized into four color-coded quadrants: the top-left and bottom-left quadrants are filled with red helices, the top-right and bottom-right quadrants are filled with blue helices, the top-center and bottom-center quadrants are filled with yellow helices, and the top-right and bottom-left quadrants are filled with green helices. Each helix is represented by two parallel strands that twist around each other, forming a ladder-like structure with vertical rungs. The entire grid is set against a white background.

5 L'EXPANSIVITÉ

- ▶ Peut-on traiter des informations **négatives** (absentes) ?
- ▶ Argument « **pour** » : cases optionnelles non remplies, lues comme **non**.
- ▶ Argument non valable : **Retour**, qui veut dire « Je ne réponds pas ». Sinon attente du bus... C'est en fait le **problème d'arrêt**.
Démonstration rigoureuse en utilisant la machine à Cantor.
- ▶ Le langage est donc **expansif**, il ne fabrique que des informations positives. Penser à une recherche de fichiers.
- ▶ Le formalisme mathématique est **expansif** : il **accumule** les théorèmes. Ce n'est pas le cas de la médecine.

6 LES PARADOXES

- ▶ Paradoxes de l'intuition : «**courbe**» de Peano qui passe par tous les points d'une surface.
- ▶ Paradoxes du raisonnement : contradiction dans la théorie **naïve** des ensembles (« corrigée » depuis). Russell (1905) : soit $X = \{x; x \notin x\}$; contradiction car à la fois $X \in X$ et $X \notin X$, une proposition et sa négation (toujours la machine à Cantor). Parmi les principes logiques : $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$: **d'une contradiction on déduit n'importe quoi**... Le **ressort** du formalisme est brisé.
- ▶ Hilbert (1900) : **démontrer la cohérence** (non-contradiction) de l'arithmétique. Récidive vers 1920 avec un programme **finitiste**. **Réduction** de la question aux seuls paradoxes formels.

FORMALISTES

Zorro est arrivé...

7 LA RÉCESSIVITÉ

- ▶ Démontrer la cohérence des mathématiques dans les mathématiques : une espèce d'**auto-amnistie**, atténuée par la restriction des méthodes permises.
- ▶ On n'a droit qu'aux opérations et aux raisonnements « finis », un tout petit bout de **AP**, une sorte de... **commission parlementaire**.
- ▶ Restriction aux seules propriétés **récessives**. Identités $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, $abc \neq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \neq c^3$, etc.
- ▶ Par exemple on **montrerait** qu'un théorème a toujours un nombre pair de symboles ; si P est démontrable, $\neg P$ en a un nombre impair et n'est pas démontrable... **Trop naïf !**

8 LE POPPERISME

- ▶ Popper, philosophe néo-positiviste, reprend les idées de Hilbert.
Un énoncé scientifique n'a de valeur que s'il existe un protocole capable —en principe— de le **prendre en défaut**.
- ▶ Vérification des lois de la nature à un certain **degré de précision**.
- ▶ Mais aussi «**jusqu'ici ça va**».
- ▶ En mathématiques, vérifier à la précision $1/N$, c'est vérifier jusqu'à l'entier N : Hilbert/Popper, même combat. Le «**récessif**» typique, c'est la cohérence : «**jusqu'ici pas de contradiction**».
- ▶ Une propriété est expansive quand sa négation est récessive.
Exemple «**être démontrable**» vs. «**être cohérent**».

INCOMPLÉTUDE

Non, c'était Gödel...

9 LE THÉORÈME DE GÖDEL

UTLS 17 Juin 2000

- ▶ Le formalisme est lui-même un objet **mathématique**, remarque Hilbert, **nécessaire au programme**, à sa rigueur. Remarque prise au sérieux par le logicien Gödel en 1931.
- ▶ Les **objets** du formalisme de **AP**, termes, propositions, sont représentés par des **nombres de Gödel** : $\ulcorner t \urcorner$, $\ulcorner P \urcorner$. « Banale » énumération des propositions. Numérologues s'abstenir.
- ▶ Les **propriétés** du formalisme sont représentées par des **propositions** de l'arithmétique de Peano **AP**, ainsi « P est démontrable » devient $\text{Thm}_{\text{AP}}[\ulcorner P \urcorner]$, « **AP** est cohérente » devient Coh_{AP} . Pas de sens arithmétique immédiat.
- ▶ Proposition $G \sim \neg \text{Thm}_{\text{AP}}[\ulcorner G \urcorner]$: « **Je ne suis pas prouvable** »
Le paradoxe du menteur « **Je mens** » ? . . .

10 LE THÉORÈME DE GÖDEL (SUITE)

UTLS 17 Juin 2000

- ▼ ... Non, car qui nous dit que vérité et prouvabilité coïncident ?
En fait G est vraie et non prouvabile dans **AP**.
 - ▼ On peut remplacer G par la cohérence de **AP**.
 \ll **Si AP est cohérente elle ne prouve pas sa propre cohérence** \gg .
 - ▼ $Coh_{\mathbf{AP}}$: proposition récessive ; prouvabilité de $Coh_{\mathbf{AP}}$: proposition expansive. (Cf. le **problème d'arrêt** : se mettre en boucle c'est récessif, détecter une boucle, c'est expansif.)
- Récessif \neq Expansif**
- Vrai \neq Prouvable**
- P Non Démontrable \neq $\neg P$ Démontrable.**

11 NÉGATIONS ET NÉGATIONNISTES

UTLS 17 Juin 2000

- ▶ Fusiller Gödel en réfutant le théorème ? « Tout est faux, il suffit d'attendre ».
- ▶ Tentation du **gaz sarin** ; mais n'est pas le C^e Nemo qui veut...
▶ Une réfutation du théorème le prouverait ; doit-on lui **dénier toute valeur** ?
- ▶ Béatifier Gödel ? Délire suspect autour du 2nd théorème.
Nombres mystérieux, Gödel-Escher-Bach,...
- ▶ **On ne revisse pas ses lunettes en les gardant sur le nez.**
- ▶ L'idéologie **formaliste** de Hilbert finit par se réfuter elle-même par saturation scientiste : démontrer la **cohérence** dans les **mathématiques**. Vous l'avez voulu, Georges Dandin !

INTUITIONNISMES

Pendant que Dupond et Dupont progressaient hardiment...

12 LE POST-GÖDELISME

UTLS 17 Juin 2000

- ▶ Kreisel : les **doutes** quant à la cohérence sont plus **douteux** que la cohérence elle-même.
- ▶ Poursuite des démonstrations de cohérence : **l'assurance contre l'explosion de la Terre**, un produit indémodable.
- ▶ Réussite paradoxale du logicien Gentzen dans les années 1930, à comparer au **surgeon** d'un arbre mort.
- ▶ Lecture moderne de Gentzen : interaction entre une preuve de P et une de $\neg P$. Identique à l'interaction entre programme et environnement, argument et fonction. **Curry-Howard** ~ 1970.
- ▶ Logique **linéaire** (1985) : symétrie programme/environnement. Logique **procédurale**, et non plus **réaliste**. Les démonstrations deviennent des procédures appelées **dessein**.

13 LA LUDIQUE OU L'EXTINCTION DU POPPERISME

- ▶ Deux machines \mathfrak{M} , \mathfrak{N} discutent en vase clos. Chacune peut choisir un **déssein**, i.e. un programme qui « **teste l'autre** » et soit :
Consensus : L'une des deux finit par jeter l'éponge.
Dissensus : Elles se chamaillent à l'infini.
- ▶ Comportements **duaux** de \mathfrak{M} et \mathfrak{N} : \mathfrak{M} ne se permet que les **désseins** « **consensuels** » avec les désseins de \mathfrak{N} , et **vice-versa**.
- ▶ Ces tests sont sujets... à test (**dissensus = récusation réciproque**). Sortie du carcan **récessif/expansif**.
- ▶ Déssein = démonstration avec « **erreurs de logique** » : le **daimon** \dagger , celui qui jette l'éponge. **Dualité moniste** et sortie du réalisme.

(à suivre)

14 SUPPLÉMENT DÉTACHABLE

- ▼ L'incomplétude est **interne**.
- ▼ La vérité est-elle une **paraphrase vide** ?
- ▼ La réalité des entiers : les opérations sont elles définies sur les objets ou les objets ne sont-ils qu'une **réification** des opérations ?
- ▼ « Problème du millénium » :

P vs. NP